Sujet 1 - Suites de nombres

Partant d'un nombre entier, par exemple 95, on en multiplie les chiffres ce qui donne $45(=9\times5)$; on recommence et cela donne $20(=4\times5)$; on recommence et cela donne 0, qui lui-même redonne 0, et donc on s'arrête.

On note cela : $95\to45\to20\to0$.

On dit qu'il s'agit de la *suite multiplicative* partant de 95. Sa *longueur* est 4. Elle *arrive sur* 0.

Le sujet consiste à étudier les suites *multiplicatives.*

Partie A :

Question 1 :

Calculer toutes les suites multiplicatives qui partent de *n* pour $n=1,2,\ldots,100$.

Question 2 :

Quelle est la plus longue suite multiplicative pour les entiers partant de *n,* pour $n=1,2,\ldots,100$?

Et pour $\mathrm{n}=1,2,\ldots,1000$? $\mathrm{n}=1,2,\ldots,10\ 000$? etc. (utilisez un ordinateur)

Existe-t-il une règle simple ?

Question 3 :

Se peut-il qu'une suite multiplicative soit infinie ? Répondre en faisant un raisonnement.

Question 4 :

Certaines suites multiplicatives s'arrêtent sur 0 (c'est le cas de la suite multiplicative de 95). D'autres s'arrêtent sur 1 (c'est le cas de la suite multiplicative de 111).

Faire une liste de tous les cas possibles.

Quels sont les cas les plus fréquents pour $n=1,2,\ldots,100$?

Est-ce que ce qu'on trouve pour $n=1,2,\ldots,100$ se généralise ? (autrement dit est-ce qu'il y a d'autres cas que ceux trouvés pour $n=1,2,\ldots,100$).

Question 5 :

Quels sont les entiers *n* tels qu'il existe au moins une suite multiplicative de longueur *n* ?

Question 6 :

On note *prop*(*n*) la proportion des suites multiplicatives partant de $n=1,\ldots,10^m$ qui s'arrêtent sur 0.

Donner des conditions simples assurant qu'une suite multiplicative s'arrête sur 0.

Montrer que *prop*(*n*) tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini.

Question 7 :

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

Partie B :

La définition de *suite multiplicative* dépend de la base 10 utilisée usuellement pour écrire les nombres.

On reprend la même définition mais en considérant cette fois une base de numération quelconque b (b entier, $b \geqslant 2$). On parle alors de *suite multiplicative en base b*.

Exemple de suite multiplicative en base $b=3$: 222→22→10→0 (car 8 en base 3 s'écrit 22, et que 4 s'écrit 10)

Reprendre l'étude précédente pour la base 10, en considérant cette fois :

1) la base 2 ;
2) la base 3 ;
3) une base quelconque.

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

Partie C

Au lieu de multiplier les chiffres, on les additionne et on parle donc de *suite additive.*

Exemple : 9123→15→6

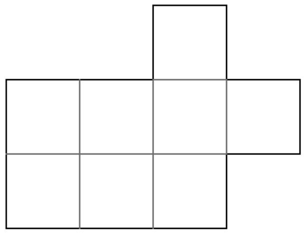
Etudier les suites additives (d'abord en base 10, puis en base quelconque).

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

Sujet 2 - Formes avec des carrés

On nommera *forme avec des carrés* (ou *forme* tout court) une juxtaposition de carrés de même taille collés les uns aux autres (à chaque fois côté contre côté). Les trous sont autorisés, mais il faut que la pièce soit d'un seul tenant.

Exemple :



Pour chaque forme F, on notera :

- p son périmètre (ici : 14)
- s sa surface en carrés (ici : 8)
- c le nombre de côtés (ici : 10)
- v le nombre de côtés verticaux (ici : 5)
- h le nombre de côtés horizontaux (ici : 5)

Remarque : deux formes sont considérées identiques si en les découpant en carton, on peut les superposer.

Partie A

Question 1 :
Quelles relations existe-t-il entre c, v, h ? Faire des raisonnements pour démontrer ces relations.

Question 2 :
c peut-il être impair ?

Question 3 :
Est-ce que c peut être n'importe quel nombre pair supérieur ou égal à 4 ?

Question 4 :
Quelles relation existe-t-il entre p et s ? Est-il vrai que $p \geqslant s$?

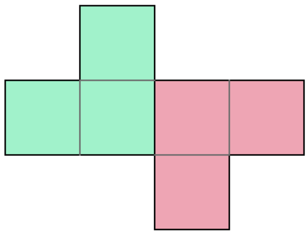
Question 5 :
Quels sont les couples possibles (p, s) pour $p = 4, 6, 8, 10, 12, 14$? Faire un tableau (aller plus loin que 14, si ce n'est pas trop compliqué).

Question 6 :
Combien existe-t-il de formes différentes avec $p = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20$? Faire un tableau (aller plus loin que 20, si ce n'est pas trop compliqué).

Question 7 :
Combien existe-t-il de formes différentes avec $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$? Faire un tableau (aller plus loin que 6, si ce n'est pas trop compliqué).

Partie B

On appelle *forme double* une forme obtenue en collant l'une à l'autre deux fois la même forme. Par exemple :



Question 1 :

Soit F est une forme double. Est-ce que *s* peut être impair ?

Question 2 :

Est-ce que *c* peut être n'importe quel nombre pair ?

Question 3 :

Quels sont les nombres pairs qui peuvent être le *p* d'une forme double ?

Question 4 :

Quels sont les couples possibles (p, s) pour $p=4, 6, 8, 10, 12, 14$? Faire un tableau (aller plus loin que 14, si ce n'est pas trop compliqué)

Question 5 :

Combien existe-t-il de formes doubles différentes avec $p=4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20$? Faire un tableau (aller plus loin que 20, si ce n'est pas trop compliqué).

Question 6 :

Combien existe-t-il de formes doubles différentes avec $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$? Faire un tableau (aller plus loin que 6, si ce n'est pas trop compliqué).

Question 7 :

Existe-t-il des relations particulières entre *p* et *s* vérifiées pour toute forme double qui n'existaient pas pour les formes ?

Partie C

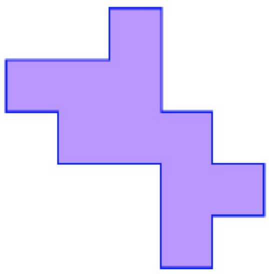
Etudier de la même façon les formes triples, quadruples, etc.

Se demander s'il existe des formes qui soient à la fois des formes doubles et des formes triples ? Quelles sont leurs propriétés ?

Partie D

Une forme double peut donner lieu à un jeu qui consiste à fabriquer des énigmes, par exemple :

Ceci est une forme double :



« Trouver le découpage qui montre la même forme utilisée deux fois. »

Certaines sont très faciles, d'autres beaucoup moins. Pour un *s* donné (ou un *p* donné, ou un *c* donné). Quelles sont les énigmes les plus difficiles ?

Avec les formes à la fois doubles et triples (ou à la fois triple et quadruple, etc.) on obtient des énigmes encore plus intéressantes. En rechercher.

Sujet 3 - Les découpages convenables

Partie 1

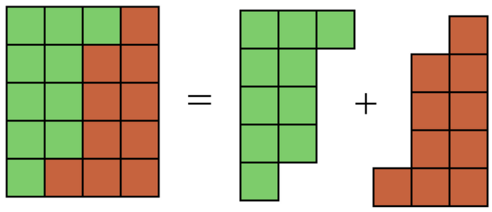
On se donne un rectangle $n \times m$ de côtés entiers n, m.

On veut le découper en deux morceaux superposables, chacun composé de carrés 1×1.

(on veut bien sûr que chaque morceau soit d'un seul tenant : chaque carré d'un morceau doit être collé au reste par au moins un côté).

On appelle cela un *découpage convenable*.

Exemple de découpage convenable :



Question 1 : Cas impossible ?

Est-ce qu'il existe toujours des découpages convenables ? Expliquer et justifier votre réponse.

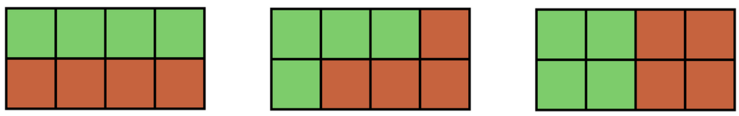
Question 2 : Etude des cas simples

Trouver de combien de façons différentes on peut faire un tel découpage convenable en deux, dans le cas des rectangles les plus simples :

2×1, 2×2, 2×3, 2×4, 3×4, 4×4, 2×5, ...

Faire des tableaux représentant les solutions.

Exemple : Dans le cas du rectangle 2×4, il y 3 découpages convenables possibles :



Question 3 :

Trouver une formule générale pour les rectangles $2 \times n$ qui donne le nombre de découpages convenables. Justifier la formule par un raisonnement.

Question 4 :

Etudier le cas des rectangles $3 \times n$. Je pense qu'il doit y avoir une formule donnant le nombre de découpages possibles, mais je n'en suis pas certain. À vous de faire la recherche.

Question 5

Étudier le cas des carrés $n \times n$.

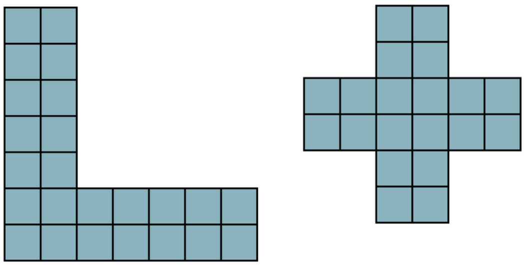
Conseil. Pour les questions 4 et 5, commencer par trouver les réponses avec $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, ... (en faisant des dessins, de manière soigneuse et ordonnée), puis à partir des réponses trouvées, essayer : *http://oeis.org/?language=french* . Ce site permet de trouver des formules pour les suites dont on connaît le début. Il peut donc vous aider.

Question 6

Essayer de trouver des familles de figures autres que les rectangles pour lesquelles on arrive facilement à faire le décompte des découpages convenables.

Exemples :

- les figures "en L" avec double rangée de carrés et les deux branches du L égales.
- les figures en "croix" avec les branches de la croix composées d'une double rangée de carrés.

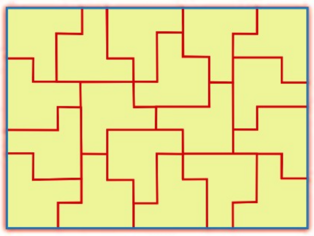


Question 7

Reprendre les mêmes questions, mais cette fois en découpant les formes en trois morceaux superposables chacun composés de carrés.

Question 8 [question très libre pour encourager la créativité]

Trouver des exemples intéressants de découpages d'un rectangle en k formes identiques comme cet exemple : un carré 12×9 découpé en 18 morceaux identiques (chacun composé de 6 carrés)



Rechercher des propriétés de ces découpages, rechercher des cas impossibles, etc.

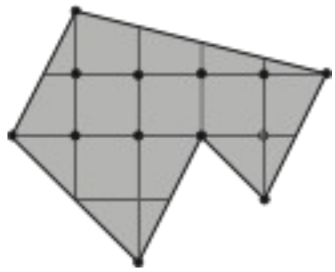
Exemple de propriété :

Pour qu'un tel découpage d'un rectangle $n \times m$ en k morceaux identiques soit possible, il faut que k divise $n \times m$. (Est-ce suffisant ?).

Sujet 4 - Calculs faciles de surfaces

On s'intéresse à une classe particulière de polygones : les polygones entiers. Pour les définir nous avons besoin de travailler sur une feuille à petits carreaux. Un point d'une feuille à petits carreaux est un point entier s'il se trouve à l'intersection de deux lignes du quadrillage. Un polygone dessiné sur votre feuille à petits carreaux est un polygone entier si tous ses sommets sont des points entiers.

Exemple : Le polygone ci-dessous est un polygone entier. Il contient 7 points entiers sur son bord, et 8 points entiers dans son intérieur, soit un total de 15 points entiers.



Voici la question générale qui nous intéresse : on considère un polygone entier P, on note N_i le nombre de points entiers contenus à l'intérieur de P, et N_b le nombre de points entiers contenus sur le bord de P.

Question 1 :

Existe-t-il une relation entre l'aire A(P) du polygone entier P, et les nombres N_i et N_b ?

Le mieux pour commencer, consiste à regarder ce qui se passe dans les cas les plus simples. Par exemple, que pouvez-vous dire dans le cas des carrés ? dans le cas des rectangles ? dans le cas des triangles rectangles ?

Voici d'autres questions qui peuvent éventuellement vous aider à réfléchir sur ce problème :

Question 2 : Si un triangle entier ne contient (y compris sur son bord) aucun point entier autre que ses sommets, que peut-on dire de son aire ?

Question 3 : Si vous obtenez des résultats sur les triangles, comment cela peut-il vous aider à traiter le cas des autres polygones entiers ?

Sujet 5 - Mots variés et mots circulaires

Comme nous sommes mathématiciens, le sens des mots ne nous intéresse pas et on considère que tout mot est acceptable (même s'il n'a pas de sens).

Question 1 :

Le nombre de mots de 3 lettres qu'on peut faire si on dispose d'un alphabet de 2 lettres **a b** est 8, car on peut faire les mots **aa ab ba bb**.

Trouver combien de mots de 2 lettres on peut faire avec un alphabet de 3 lettres **a b c**.

Généralisez en trouvant le nombre de mots de *k* lettres qu'on peut faire avec un alphabet de *m* lettres. Traitez soigneusement des cas particuliers jusqu'à deviner la réponse. Présentez vos essais sous la forme de tableaux bien rangés. Proposez une justification de la réponse.

Question 2 :

On s'intéresse maintenant aux mots qu'on peut trouver dans un autre mot.

Exemple : Les mots de trois lettres qu'on peut trouver (en prenant des lettres qui se suivent) dans **bonbon** sont : **bon onb nbo**

Il y en a trois. Les mots de trois lettres qu'on peut trouver dans **cerise** sont : **cer eri ris ise**

Il y en a quatre. Combien de mots de 3 lettres peut-on trouver au plus dans un mot de longueur 5.

Même question avec la longueur 6, puis avec la longueur 7. Traitez le cas général. On supposera que l'on dispose d'autant de lettres différentes qu'on le souhaite (et non pas seulement de 26 lettres différentes). Il faut donc trouver combien de mots différents de *p* lettres on peut trouver au plus dans un mot de longueur *k.* Donnez des exemples et justifiez votre raisonnement.

Question 3 :

On suppose maintenant qu'on ne dispose que de deux lettres **a** et **b.** Combien de mots différents de 2 lettres peut-on trouver au plus dans un mot de longueur 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.

Même chose en considérant des mots de longueur 3 (au lieu de 2).

Même chose en considérant des mots de longueur 4 (au lieu de 2). Réfléchir au cas général.

Question 4 :

On considère maintenant que les mots sont écrits circulairement : leurs lettres sont écrites sur un bracelet circulaire et donc les mots n'ont pas de début ni de fin (car le début rejoint la fin).

De ce fait, le mot circulaire **abc** est le même que le mot circulaire **bca** (si on les écrits sur des bracelets en espaçant également les lettres, on ne pourra pas distinguer les deux bracelets). Pour ne pas les confondre avec les mots usuels, on souligne les mots circulaires. On peut donc écrire :

abc = **bca** = **cab**

Trouver combien on peut faire de mots différents de longueur 3 avec les 4 lettres **a**, **b**, **c**, **d ?**

Même question avec 5 lettres. Essayez de généraliser (combien de mots différents de longueur ***k***, avec ***p*** lettres différentes disponibles). Traitez des cas particuliers en faisant soigneusement des listes.

Question 5 :

On considère des mots circulaires (comme dans la question précédente). On ne dispose que de deux lettres différentes **a** et **b.**

On cherche un mot circulaire de longueur 4 qui contient les 4 mots de deux lettres **aa ab ba aa.**

Cela existe et le mot circulaire **aabb** convient car on y trouve bien **aa ab bb** et **ba** (le dernier **b** sur le bracelet **aabb** est suivi de **a**).

Trouvez (s'il y en a) tous les mots circulaires différents qui conviennent sans écrire deux fois le même mot circulaire (n'oublions pas que dans le cas des mots circulaires **aabb = abba = bbaa = baab**).

Question 6 :

Trouvez de la même façon un mot circulaire de longueur 8 qui contient tous les mots possibles de longueur 3 (il y a 8 mots possibles de longueur 3 avec les lettres **a** et **b** qui sont **aaa aab aba abb baa bab bba bbb**).

Essayez de trouver tous les mots circulaires de longueur 8 qui conviennent (toujours en évitant d'écrire deux fois le même mot).

Question 7 :

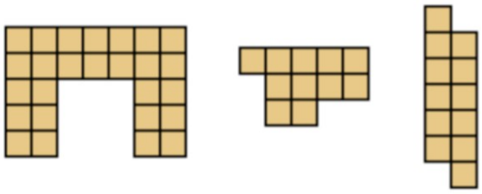
Trouvez de la même façon un mot circulaire de longueur 16 qui contient tous les mots possibles de longueur 4 (il y a 16 mots possibles de longueur 4 avec les lettres **a** et **b**)

Question 8 :

Reprendre les questions 5, 6 et 7 en considérant cette fois qu'on dispose de 3 lettres **a b c**

Sujet 6 - Pavages avec des dominos ou des rectangles

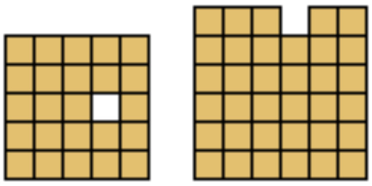
On dispose d'une boîte de dominos et de diverses figures composées de carrés collés les uns aux autres par leurs côtés.
Exemples :



On voudrait savoir quelles sont les figures de ce type qu'on peut recouvrir exactement par des dominos (sans dépasser de la figure, sans que deux dominos recouvrent la même case, sans qu'il reste des cases vides). On parle de figures "pavables" par des dominos.

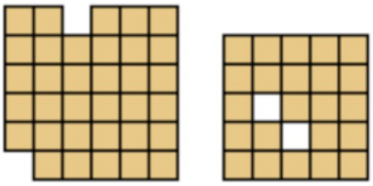
Question 1 :
Etudiez le cas où la forme est un carré de k unités de côté pour $k = 1, 2, 3, 4, ..., n, ...$
Donnez une règle générale. Il faut justifier sa réponse (par un dessin ou un argument).
Même chose avec un rectangle de côté k et l.

Question 2 :
Etudiez le cas où la forme est un carré de k unités dont on a découpé une case.
Exemples :



Envisagez tous les cas possibles. Donnez une règle générale qui indique quand c'est possible, et quand c'est impossible. Il faut justifier les réponses.

Question 3 :
Même question avec un carré dont on a coupé deux cases.
Exemple :



Attention, ce n'est pas seulement une question de nombres pairs ou impairs. Il faut justifier les réponses.

Question 4 :

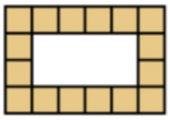
Même question avec un carré dont on a coupé trois cases.

Question 5 :

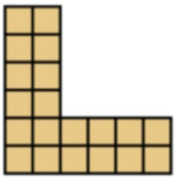
Envisagez des familles de figures (à définir vous-mêmes) et donnez des règles (en les justifiant) indiquant quand une figure de cette famille est pavable par des dominos.

Exemples de familles à envisager (mais il faut en imaginer d'autres) :

(a) Figures «bord d'un rectangle», comme :



(b) Figure en forme de L d'épaisseur 2 (ou 3, etc.), comme :



Question 6 :

Réfléchissez à la question :

Un rectangle de côté *a* et *b* (*a* et *b* des entiers) est donné. On cherche à le paver avec des rectangles plus petits de côté *c* et *d* (*c* et *d* des entiers).

Quand cela est-il possible ?

Exemple : Est-ce que le rectangle de forme 6×15 est pavable par des rectangles de forme 9×2 ?

Traitez des cas particuliers.

Essayez de trouver des familles de cas où la réponse est oui, et des familles de cas où la réponse est non.

Trouvez des conditions nécessaires, des conditions suffisantes, si possible une condition nécessaire et suffisante générale.

Question 7 :

On s'intéresse au problème de savoir de combien de façons différentes une figure (composée de carrés comme précédemment) peut être pavée par des dominos :

(a) Trouver des situations où il n'y a qu'un seul pavage possible.

(b) Trouver des situations où il y a exactement 2 pavages possibles.

(c) Trouver des situations où il y a exactement *n* pavages possibles (*n* un entier).

(d) Faire le dessin pour $n=2015$.

Sujet 7 - Configurations évanouissantes au jeu de la vie

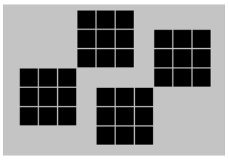
Voir le *Jeu de la vie :* http://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_vie

Le sujet peut s'étudier à la main (au début) mais l'utilisation du logiciel gratuit Golly (http://golly.sourceforge.net/) permettra d'aller plus loin.

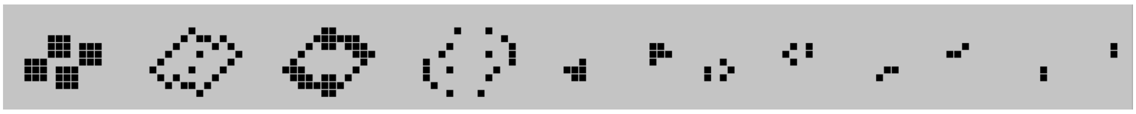
Le sujet ne demande pas de connaissances particulières (sauf les règles du jeu), il faut juste savoir imaginer et combiner des configurations en tentant de deviner ce qui se passe.

Le sujet conduit à des raisonnements combinatoires et de dénombrements, à un travail d'imagination pour modifier, associer et transformer des résultats déjà obtenus en nouveaux résultats.

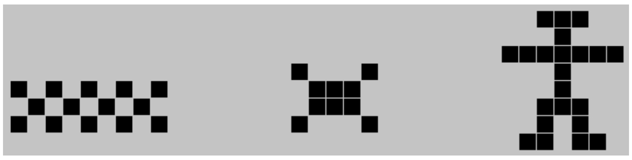
Définition de "configuration évanouissante" : une configuration qui finit par disparaître complètement. En voici un exemple :



Essayez-la. Les étapes de la disparition sont :



Définition de "configuration connexe" : les cellules vivantes doivent toutes se toucher.



Diamètre d'une configuration : la longueur du côté du plus petit carré qui contient la configuration. La première configuration des exemples ci-dessus a pour diamètre 9. La seconde 5. La troisième 8.

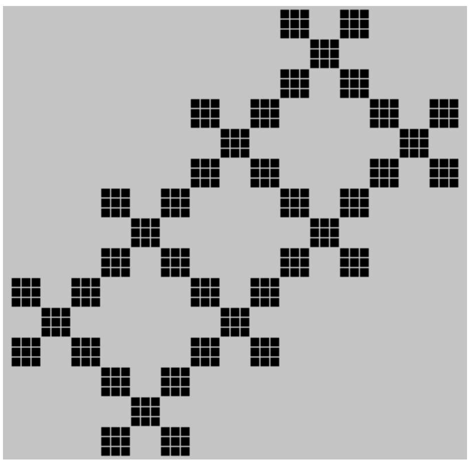
Question 1 :

Les premières questions sont faciles : il y a de très nombreuses façons de les résoudre.

(a) Pour tout entier *n*, trouver des configurations évanouissantes de *n* cellules.

(b) Pour tout entier *n*, trouver des configurations évanouissantes connexes de *n* cellules.

Voici un exemple de configuration évanouissante connexe :



Question 2 :

Proposer et étudier diverses méthodes pour construire des configurations évanouissantes et des configurations évanouissantes connexes.

Question 3 :

Trouvez des configurations évanouissantes connexes qui disparaissent en une étape.

Question 4 :

Pour tout entier n trouver des configurations évanouissantes qui disparaissent complètement après n étapes exactement.

Question 5 :

Pour tout entier n, et tout entier m, trouver des configurations de m cellules exactement qui disparaissent complètement après exactement n étapes.

Question 6 :

Trouver des configurations qui disparaissent complètement après exactement n étapes, et qui ont un diamètre au plus m

Constituer des tableaux de records et prouver que certains résultats de ces tableaux sont les meilleurs possibles.

Tableau de records 1 :

Pour chaque entier n (pour n = 2, 3, 4, 5) la configuration évanouissantes la plus grande (en nombres de cellules vivantes initiales) de diamètre n.

Tableau de records 2 :

Pour chaque entier n (pour n = 2, 3, 4, 5) la configuration évanouissante de diamètre au plus n qui vit le plus longtemps.

Question 7 :

Même question en imposant en plus la connexité.

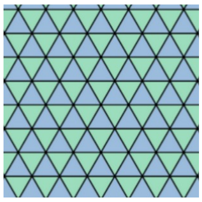
Question 8 :

Quel est le maximum (respectivement le minimum) de cellules d'une configuration qui disparaît exactement au bout de n étapes ?

Sujet 8 - Pavages du plan

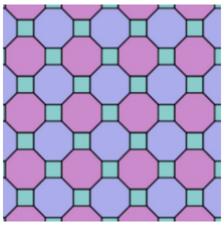
On dit qu'une figure F pave le plan, si en prenant des copies de la figure (toutes de même taille) on peut recouvrir le plan sans laisser de vide et sans que deux copies se chevauchent.

Exemple : le triangle équilatéral pave le plan :



Lorsqu'on considère plusieurs figures F1, F2, ..., Fn on dit qu'elles pavent le plan, si en prenant des copies des figures (au moins une de chaque catégorie) on peut recouvrir le plan sans laisser de vide et sans que deux copies se chevauchent.

Exemple : en prenant deux figures F1 = carré, F2 = octogone régulier (8 côtés de même longueur, 8 angles égaux), on peut paver le plan :



Question 1 :

Un triangle quelconque T étant donné, peut-on paver le plan avec des copies de T ?

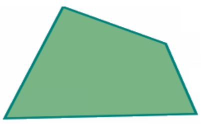
Existe-t-il plusieurs façons de faire un pavage du plan avec cette figure ?

Répondre en faisant des dessins (soit à la main, soit avec un logiciel de dessin). Faites un dessin avec un triangle de côtés 2, 3, 4 et avec un triangle de côté 2, 11, 12...

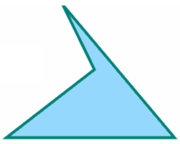
Question 2 :

Un quadrilatère (polygone à quatre côtés) quelconque étant donné, peut-on paver le plan avec des copies de T ?

Distinguer le cas d'un quadrilatère convexe ("quand on suit le périmètre, on tourne toujours à droite, ou toujours à gauche") et le cas d'un quadrilatère non convexe.



Quadrilatère convexe



Quadrilatère non convexe

Pour traiter la question, vous pouvez découper des figures en carton en plusieurs exemplaires (plusieurs exemplaires du même quadrilatère convexe quelconque, plusieurs exemplaires du même quadrilatère non convexe quelconque) et faire des essais.

Faire des dessins pour donner les solutions.

Question 3 :

Peut-on paver le plan avec un pentagone régulier (5 côtés égaux, 5 angles égaux) ?

Justifier votre réponse par un dessin ou par un raisonnement montrant que c'est impossible.

Question 4 :

Existe-t-il des pentagones ayant 5 côtés égaux (mais pas 5 angles égaux) qui pavent le plan ?

Essayez "la petite maison équilatérale" : trois côtés d'un carré pour le sol et les murs, avec un toit en V à l'envers, tels que les côtés du toit soient de même longueur que les murs. Peut-on faire plusieurs pavages différents avec la figure ?

Question 5 :

Existe-t-il des formes polygonales (le périmètre n'est composé d'un nombre fini de droites qui ne se coupent pas, chaque droite ne rencontrant que deux autres droites et cette rencontre se faisant aux extrémités) à 6 côtés qui pavent le plan ?

Même question avec 7 côtés.

Même question avec 8 côtés.

Même question avec 9 côtés.

Même question avec 10 côtés.

Etc.

À chaque fois, faire des dessins.

Peut-on affirmer que pour tout nombre entier *n* plus grand ou égal à 3, il existe une forme polygonale à *n* côtés qui pave le plan ?

Question 6 :

Existe-t-il des formes polygonales ayant 6 côtés de même longueur qui pavent le plan ?

Même question avec 7 côtés de même longueur.

Même question avec 8 côtés de même longueur.

Même question avec 9 côtés de même longueur.

Même question avec 10 côtés de même longueur.

Etc.

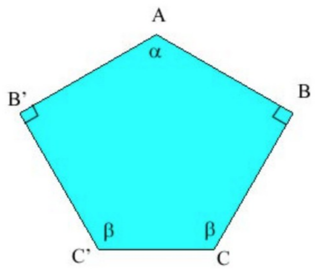
À chaque fois, faire des dessins.

Peut-on affirmer que pour tout nombre entier *n* plus grand ou égal à 3, il existe une forme polygonale ayant *n* côtés de même longueur qui pave le plan ?

Question 7 :

Le pavé du Caire est un pavé à cinq côté défini par un angle alpha, *α*, et les propriétés suivantes :

- les côtés AB, AB', B'C' et BC ont la même longueur.
- les angles ABC et AB'C' sont droits.



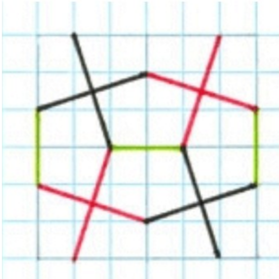
Est-ce que nécessairement les angles B'C'C et BCC' sont égaux ?

Faites plusieurs séries des formes :

(a) l'une avec $\alpha = 120°$.

(b) une autre avec $\alpha = 131°$ (constatez que la longueur du côté CC' est la même que celle des 4 autres côtés, aux erreurs de mesure près).

(c) L'une basée sur le schéma suivant :



Dans les cas (a) et (c) calculer le rapport entre la longueur des 4 côtés de même longueur, et le cinquième (plus court pour (a) et plus long pour (c)).

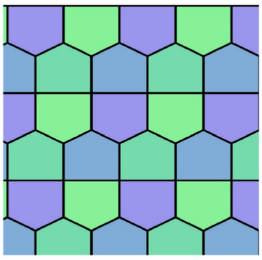
Dans chaque cas (a) (b) ou (c), monter que la figure pave le plan est proposant un dessin.

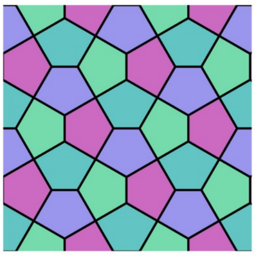
Ce dessin est ce qu'on nomme le pavage du Caire. Il existe donc plusieurs pavages du Caire selon l'angle α. On trouve effectivement ce pavage dans les rues de la ville du Caire, mais aussi en bien d'autres endroits du monde.

Question 8 :

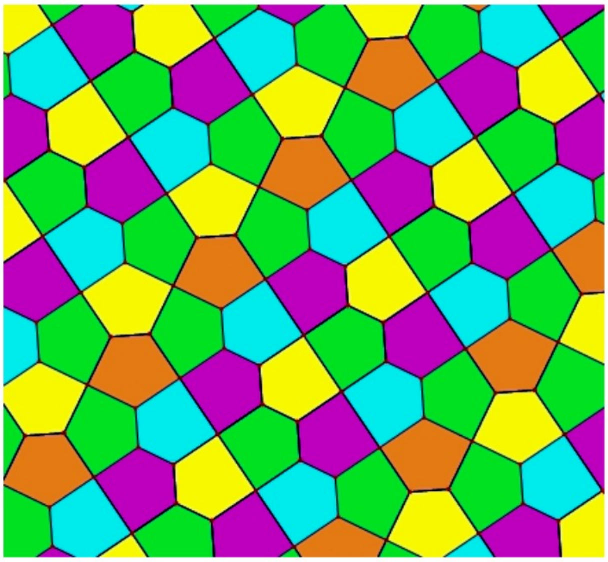
Montrer qu'avec la pentagone "petite maison à toit plat" (elle a trois côtés de même longueur, deux angles de 90°, et trois de 120°, on la notera Penta1) et la figure de la question 7 (a) (on la notera Penta2) on peut réaliser de très nombreux pavages différents les utilisant tous les deux ensemble.

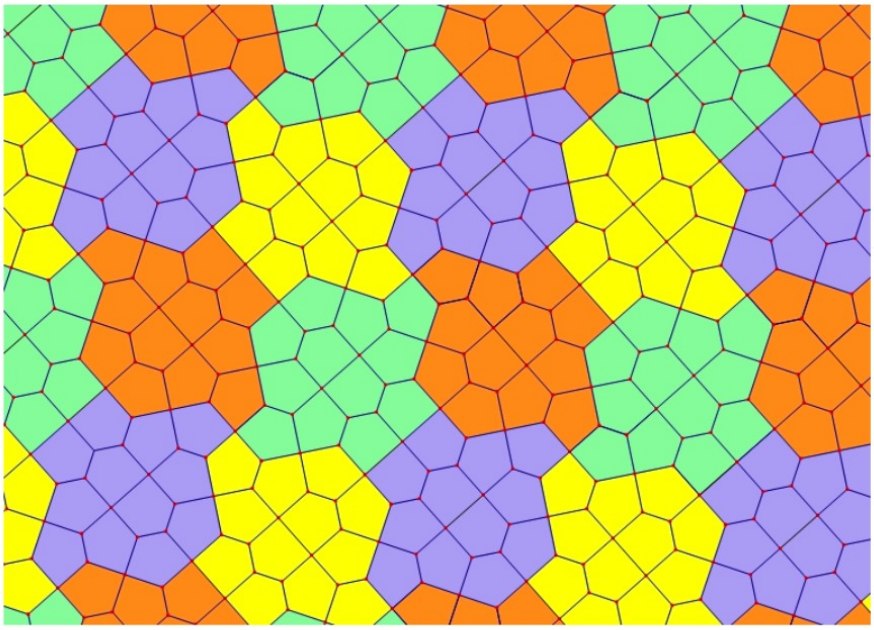
Voici deux exemples, le premiers utilisant uniquement Penta 1 et le second utilisant uniquement Penta2.

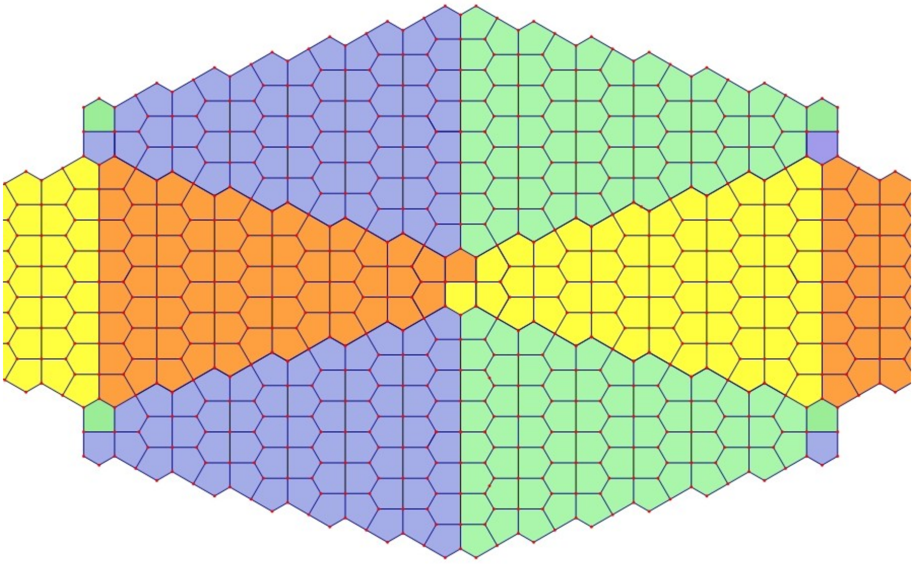




Voici d'autres exemples utilisant à la fois Penta1 et Penta 2.







Il existe bien d'autres possibilités avec Penta1 et Penta 2. Elles ne sont pas toutes connues aujourd'hui. Trouvez-en et dessinez-les soigneusement.

Question 9 :

Trouver d'autres polygones à cinq côté qui pavent le plan qui soient différents de tous ceux déjà rencontrés.

Sujet 9 - Nombres palindromes

Les mots « gag », « non », « elle », « rotor », « ressasser » ont une propriété qui saute aux yeux : on peut les lire de droite à gauche aussi bien que de gauche à droite. On dit que ce sont des palindromes : « ressasser » est le plus long mot palindrome en français.

Si on néglige les blancs, les accents, les majuscules et la ponctuation, il devient possible de composer des phrases et même de longs textes palindromiques. Voici quelques exemples de phrases :

- Élu par cette crapule. (Marcel Duchamp)
- Noël a trop par rapport à Léon. (Sylvain Viart)
- Rue Verlaine gela le génial rêveur. (Jacques Perry-Salkow)
- Ésope reste ici et se repose. (Maître Capelo)

Le mathématicien préfère envisager les nombres palindromes. En trouver est facile puisque 0 et toute suite de chiffres ne commençant pas par 0 représente un nombre en base 10 et qu'on peut donc sans difficulté en écrire qui soient des palindromes : 242, 10001 ou 12321.

Voici le début de la liste infinie des palindromes de chiffres :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, …

Question 1 : Combien sont-ils ?

(a) Combien existe-t-il de nombres palindromes en base 10 possédant n chiffres ? (faire attention aux 0 : 0 désigne un nombre, mais à part lui une suite de chiffres qui représente un nombre ne commence pas par 0). Il faut distinguer le cas n pair du cas n impair.

(b) En déduire le nombre de nombres palindromes inférieurs à 10^n pour n = 1, 2, 3, 4, ... Faire un tableau pour les réponses.

Question 2 : Divisibilité, nombres premiers

(a) Vérifier sur quelques exemples que : si un nombre palindrome possède un nombre pair de chiffres alors il est divisible par 11.

(b) Est-ce général ? Pourquoi ?

(c) Les nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres peuvent-ils être des nombres premiers ?

(d) Formuler des conjectures au sujet des nombres premiers palindromes.

Question 3 : Formules donnant des palindromes

(a) Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

$1 \times 1 = 1$

$11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 1111 = 1234321$

$11111 \times 11111 = 123454321$

Est-ce que cette méthode donne toujours des palindromes quand on augmente le nombre de 1 ?

(b) Même question pour la méthode suivante :

$11 \times 11 \times 11 = 1331$

$11 \times 11 \times 111 = 13431$

$11 \times 11 \times 1111 = 134431$

...

(c) Même questions encore pour les méthodes suivantes :

$11 \times 111 \times (11...11) = 13566...66531$ et $111 \times 111 \times (11...11) = 136899...9998631$

(d) Imaginez d'autres méthodes.

Question 4 : Et dans les autres bases ?

(a) Reprendre les questions que vous voulez en vous plaçant dans d'autres bases que la base 10.

(b) En particulier est-il vrai que « les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base *b*, sont multiples de (*b*+1) » ?

(c) Le nombre 105 est palindrome dans plusieurs bases :

n effet : $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$.

(d) Trouvez d'autres exemples.

Question 5 : Sommes de nombres palindromes

(a) En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. Cette affirmation était dénommée « conjecture faible de Goldbach », mais c'est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontré en 2013.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes ?

Est-ce que tout nombre est somme de deux nombres palindromes ?

(b) Est-ce que tout nombre est somme de trois nombres palindromes ?

(Essayez pour 20 nombres pris au hasard)

Etc.

(c) Formuler une conjecture.

Sujet 10 - Recouvrir l'icosaèdre avec des chapeaux

L'icosaèdre est un des cinq polyèdres réguliers de Platon (pour chacun d'eux, chaque face est un même polygone régulier, et tous les sommets ont exactement la même forme).

L'icosaèdre est le polyèdre composé de 20 triangles équilatéraux collés comme ceci :

À un sommet de l'icosaèdre se rejoignent 5 triangles équilatéraux. Si on considère uniquement ces cinq triangles, cela constitue une sorte de chapeau.

Question 1 :

Combien faut-il de tels chapeaux au minimum pour recouvrir le l'icosaèdre ?

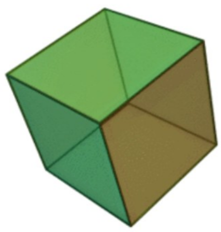
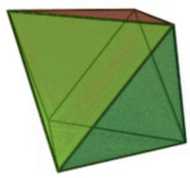
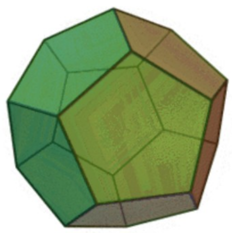
Comme il y a 20 faces et que chaque chapeau est fait de 5 triangles équilatéraux, il faut au moins 4 chapeaux pour recouvrir l'icosaèdre. Mais est-ce que 4 chapeaux peuvent réussir ce recouvrement ? Si 4 ne suffisent pas, est-ce que 5 suffisent ? Si 5 ne suffisent pas est-ce 6 suffisent ? etc.

Pour traiter la question construisez un icosaèdre en carton et des chapeaux et faites des essais.

Il faut justifier les réponses en faisant des dessins ou en venant expliquer les résultats avec les objets construits (icosaèdre et chapeaux).

C'est assez facile de trouver la réponse (quand on a fait les constructions en carton), mais c'est assez difficile de la justifier et il faut donc rechercher des raisonnements aussi précis que possibles avec les objets construits pour expliquer et justifier votre résultat.

Question 2 :

Tétraèdre	Hexaèdre ou Cube	Octaèdre	Dodécaèdre
			

Mêmes questions avec les autres polyèdres réguliers de Platon (à chaque fois les polygones qui se rejoignent en un sommet définissent une sorte de chapeau, et à chaque fois, il faut trouver le nombre minimum de chapeaux permettant de recouvrir le polyèdre).

C'est très facile pour le tétraèdre, le cube et l'octaèdre.